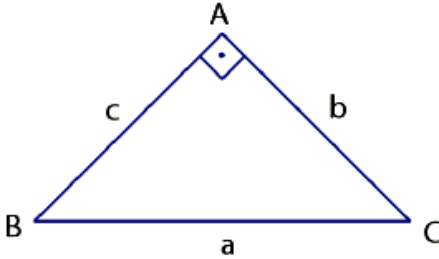
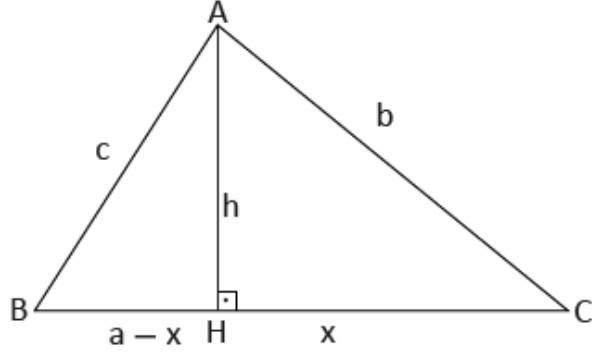


Etkinlik No	5
Ders Adı	Matematik
Sınıf Düzeyi	9-11. Sınıflar arası
Etkinlik Adı	Kosinüs Teoreminden Üçgen Eşitsizliğine
Süre	40'
Strateji, Yöntem ve Teknikler	Araştırma-inceleme yoluyla öğretim, problem çözme, tartışma, bilgisayar destekli öğretim.
Materyal/Araç Gereç	Meb ders kitabı, Geogebra programı.
Disiplinler arası Boyut	Bilişim teknolojileri.
Kazanımlar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Uzunlukları verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturduğunu değerlendirir. 2. Kosinüs teoremini ifade ve ispat eder. 3. Üçgen eşitsizliği ile kosinüs teoremi arasında bağlantı kurar.
Hazır Bulunuşluk ve Ön Hazırlık	<p>Öğrencilerin Pisagor teoremi ve dik üçgenle ilgili temel bilgilere sahip olması gerekir. Aşağıdaki hatırlatmalar yapılabilir:</p> <p>Bir açısı 90° olan üçgene dik üçgen denir.</p> <p>90° nin karşısındaki kenara hipotenüs, diğer kenarlara dik kenarlar denir.</p> <p>Hipotenüs uzunluğu dik kenar uzunluklarından daha büyüktür.</p> <p>$a > b$, $a > c$, $a^2 = b^2 + c^2$</p>  <p>Dik Üçgende trigonometrik oranlar hatırlatılır.</p> $\sin \widehat{B} = \frac{b}{a}, \cos \widehat{B} = \frac{c}{a}, \tan \widehat{B} = \frac{b}{c}, \cot \widehat{B} = \frac{c}{b}$ <p>Öğretmen Geogebra programını açarak kullanıma hazırlar.</p>
Öğrenme Öğretme Süreci	<p>Öğrencilere; “Dik üçgende A açısı 90° olmadığında a kenar uzunluğu nasıl hesaplanabilir? Bu duruma uygun bir genelleme yapınız.” sorusu yöneltilir. Gerekli durumlarda hatırlatmalar yapılarak ve ipuçları verilerek öğrencilerle aşağıdaki aşamalar izlenir, sorunun cevabına ulaşılır:</p>



Yukarıdaki şekilde ABC üçgeninde kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$; iç açı ölçüleri $m(A)$, $m(B)$ $m(C)$ olmak üzere $[AH] \perp [BC]$ olsun.

$|HC| = x$ olduğunda $|BH| = a - x$ olur.

AHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$$|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$$

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \text{ olur. (1)}$$

AHB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında,

$$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$$

$$c^2 = h^2 + (a - x)^2 \text{ olduğuna göre}$$

$$h^2 = c^2 - (a - x)^2 \text{ olur. (2)}$$

(1) ve (2) denklemleri birlikte çözüldüğünde

$$b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2 \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \text{ olur. (3)}$$

AHC dik üçgeninde

$$\cos(\hat{C}) = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos(\hat{C})$$

olur. Bu değer (3) denkleminde yerine yazıldığında;

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C})$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

yazılabilir.

Elde edilen bu bağıntı kosinüs teoremidir. Buradan üçgen eşitsizliği ile arada ilişki kurmak için öğrencilere “Bulunan bu ifadedeki açı ölçüsünün 180° olması durumunu değerlendiriniz.” sorusu yöneltilir. Öğrencilerin aşağıdaki sonuca ulaşmaları beklenir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

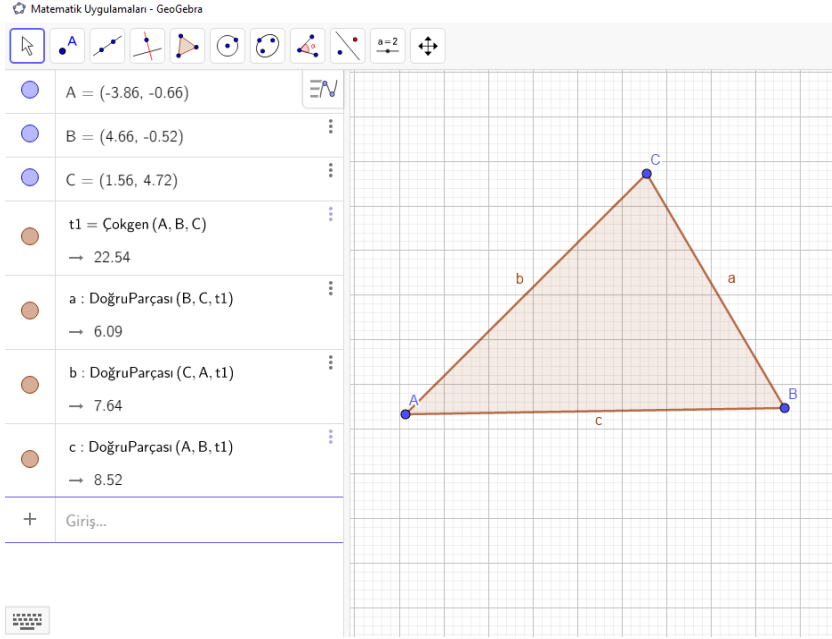
$$\cos(180) = -1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

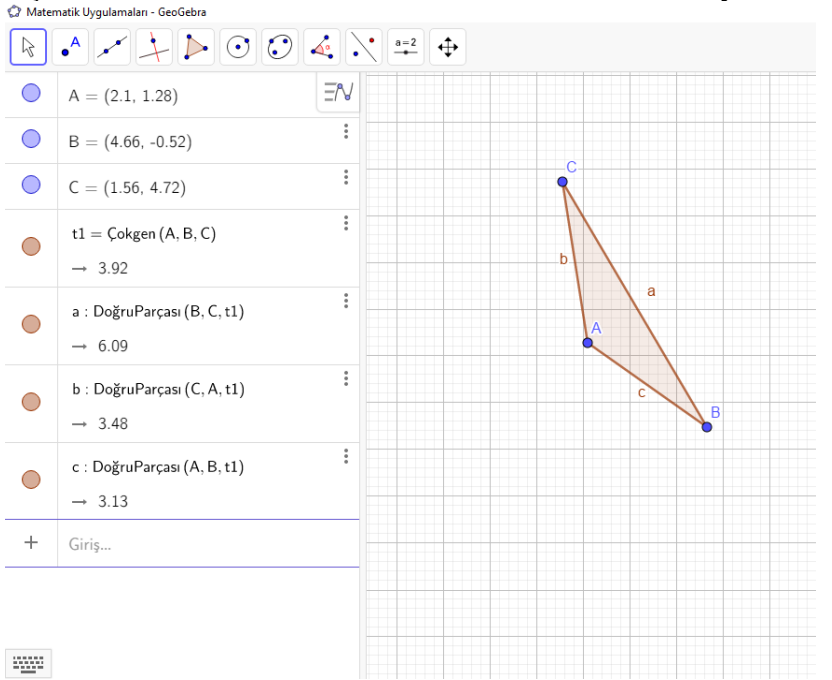
$$a^2 = (b + c)^2$$

olur.

a, b ve c değerleri uzunluk belirttiğinden $a = b + c$ de yazılabilir. Öğrencilere bunun ne anlama geldiği sorulur. Durumu görselleştirmek için; GeoGebra programından yararlanılır. Programda araç çubuğundaki "Çokgen" sekmesine tıklanır. Daha sonra grafik penceresinde üçgen olacak şekilde üç farklı noktaya ve ardından ilk noktaya tekrar tıklayarak ABC üçgeni oluşturulur.

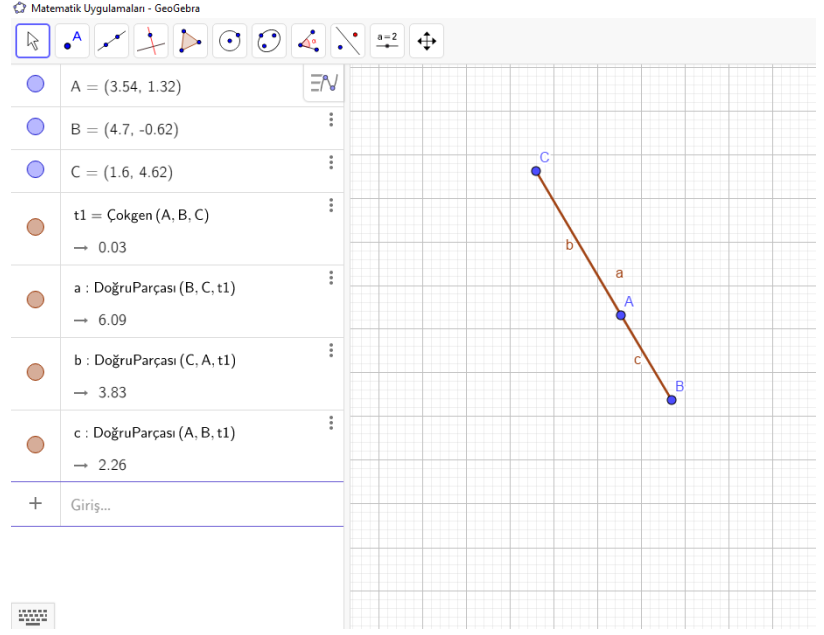


Grafik penceresinde ABC üçgeninin A köşesini, farenin sol tuşuna basılı tutarak oynatılır.



A köşesi B ve C köşelerinin arasına A, C, B noktaları doğrusal olacak şekilde taşındığında şeklin üçgen olmadığı görülür. Öğrencilere bu durumun nedeni sorulur. Öğrencilerden üçgen eşitsizliğini hatırlayarak bir kenarın diğer iki kenarın toplamından büyük olması gerektiği ancak burada eşit olduğunu ifade etmeleri beklenir.

A noktası diğer iki noktanın arasına gelecek şekilde üçgenin B yada C köşelerini taşıyarak doğrusal olma durumu elde edilebilir (Üçgen oluşmaz!).



Böylelikle üçgende iki kenar arasındaki açı 180 derece olduğunda üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı hem kosinüs teoremi üzerinden hem de GeoGebra çizimleri üzerinden keşfedilmiş olur.

Ölçme ve Değerlendirme

Kosinüs teoremi üzerinden açı ölçüsünün 0° olması durumunu değerlendiriniz. Geogebra programı kullanarak çizimini yapınız.

Kaynakça

- [1] Komisyon, TC Milli Eğitim Bakanlığı 9 Matematik Ders Kitabı, Ankara, 2021.
- [2] Komisyon, TC Milli Eğitim Bakanlığı 11 Matematik Ders Kitabı, Ankara, 2021
- [3] <https://www.geogebra.org/calculator>